المتتابعات والمتسلسلات الحسابيّة والهندسيّة

سلسلة الحقائب التعليميّة في STEM

المرحلـــة الثانويّة

נסרק עם CamScanner

المقدِّمة

المجال التقنية | العلوم | الرياضيّات | الهندسة

تُعدّ الحقيبة التعليميّة وسيلة تعليميّة ذات أهمِّيَّة كبيرة في التعلُّم الذي يعتمد على تفعيل دور الطالب في التعلُّم وإنتاج المعرفة، وهو الهدف الأساس لذلك التعلُّم الذي يبتعد بالموقف التعليمي عن التلقين، ويوجِّهه إلى خلق دور فاعل للطالب في التعلُّم.

يعتمد بناء الحقيبة التعليمية على وجود أنشطة تعلميّة مبنيّة على أهداف رصينة تتحقَّق من خلال تنفيذ الطالب لهذه الأنشطة، معتمدًا في ذلك على أدلة إرشادية محكمة البناء، يستطيع الطالب بالاعتماد عليها إنتاج المعرفة المرغوبة وتحقيق الأهداف المنشودة، ويمارس المعلم خلال هذا التعلُّم دور الموجِّه والمرشد لطلابه للوصول بهم إلى التعلُّم المرغوب.

وحتى يكون التعلُّم ذا معنىً، ويشعر الطالب بقيمته في حياته، فلا بدّ من ربط التعلُّم بالحياة وبالعلوم الأخرى، وعليه؛ تكون الأنشطة المنتقاة تطبيقات حياتيّة لما يتعلّمه الطالب، مما يساعد على انتقال أثر التعلُّم إلى مواقف جديدة، واستمراريته، والشعور بالرضى من تعلّمه.

وقد بُنيتْ هذه الحقيبة الموسومة بالعنوان «المتتابعات والمتسلسلات الحسابيّة» بناءً على الفلسفة السابقة؛ فقد حُدِّدت الأهداف بدقَّة، وبُنيت الأنشطة لإنتاج المعرفة، وقد رُبِط ما تعلَّمه الطالب في الرياضيّات بالعلوم الأخرى؛ ليشعر الطالب بأهمِّية ما تعلَّمه من خلال أدلة إرشادية تساعده على السير في التعلُّم في أثناء تنفيذ النشاط.

ويدعى هذا المنحى في التعليم بمنحى STEM، وهو منحىً تكاملي يسعى إلى توظيف العلوم والرياضيّات والهندسة والتكنولوجيا في إنتاج المعرفة العلمية، من خلال المشاريع المرتبطة بأهداف المقرّرات الدراسيّة، وإستراتيجيّات حلّ المشكلات، ومهارات القرن الحادي والعشرين، ومهارات التفكير بربط المفاهيم العلميّة بواقع الحياة اليوميّة؛ ليسهل استيعابها وتعميق فهمها لدى الطلاب من خلال مشاريع متنوّعة في المجالات جميعها السابقة الذكر، وتعزيز روح التعاون والعمل الجماعي وتبادل الخبرات بين الطلاب.

נסרק עם CamScanner

المقدِّمة

وإستراتيجيّات حلّ المشكلات، ومهارات القرن الحادي والعشرين، ومهارات التفكير من خلال ربط المفاهيم العلميّة بواقع الحياة اليوميّة؛ ليسهل استيعابها وتعميق فهمها لدى الطلاب من خلال مشاريع متنوعة في المجالات جميعها السابقة الذكر، وتعزيز روح التعاون والعمل الجماعي وتبادل الخبرات بين الطلاب.

يظهر في العديد من مظاهر الحياة الطبيعيّة تتابع في سلوكاتها أو نمط في تشكيلاتها، فترى العديد من النباتات تترتّب أزهارها وفق نمط ثابت يضفي عليها مزيدًا من الألق والجمال، وتخضع العديد من الظواهر العلميّة والمواقف الحياتيّة كذلك إلى نمط ثابت يساعدنا على فهمها والتنبؤ بسلوكاتها المستقبلية. ومن الممكن تحويل مثل هذه الظواهر إلى أشكال رياضيّة تسمّى «المتتابعات»؛ وذلك لتسهيل دراستها وفهمها للتنبؤ بسلوكها المستقبلي.

محتويات الحقيبة:

أوراق عمل.

أدلة إرشاديّة.

تطبيقات عمليّة (أنشطة).

נסרק עם CamScanner

الأهداف

يتوقع بعد تنفيذ أنشطة الحقيبة أن يكون الطالب قادرًا على:

1. توظيف دراسة الطالب للمتتابعات والمتسلسلات الحسابيّة والهندسيّة في دراسة وتحليل الظواهر الطبيعيّة التي تتبع نمطًا معينًا.
2. اكتشاف أنماط حياتيّة جديدة باستعمال المتتابعات والمتسلسلات الحسابيّة والهندسيّة.
3. بناء أنماط جديدة تعتمد على المتتابعات والمتسلسلات الحسابيّة والهندسيّة.
4. اكتشاف القوانين المرتبطة بالمتتابعات والمتسلسلات، وإجراء العمليّات الرياضيّة المرتبطة بها.
5. تعرُّف تطبيقات المتتابعات والمتسلسلات الحسابيّة والهندسيّة في العلوم الأخرى.
6. حلّ مسائل ترتبط بالمتتابعات والمتسلسلات الحسابيّة والهندسيّة.

נסרק עם CamScanner

المفاهيم والمصطلحات

• المتتابعة.	• المتتابعة الهندسيّة.
• المتسلسلة.	• المتسلسلة الحسابيّة.
• المتسلسلة الهندسيّة.	• المتسلسلة الهندسيّة اللانهائيّة.
• المتسلسلة المتقاربة.	• المتسلسلة المتباعدة.
• الأوساط الحسابيّة.	• الأوساط الهندسيّة.

נסרק עם CamScanner

נסרק עם CamScanner

أنشطة الحقيبة

النشاط الرئيس الأوّل:

مكعّبات الليغو

مدّة تنفيذ النّشاط 60 دقيقة

נסרק עם CamScanner

المقدِّمة

تقسم المتتابعات إلى أقسام عدّة، فمنها ما تسمّى وفقًا للنمط الذي تتبعه؛ مثل المتتابعات الحسابيّة والهندسيّة، ومنها ما تسمّى وفقًا لعدد حدودها كالمنتهية وغير المنتهية، وهكذا. سنركز في هذا النشاط على المتتابعات والمتسلسلات الحسابيّة.

يحدّد كلّ حدٍّ في المتتابعة الحسابيّة، بإضافة قيمة ثابتة إلى الحدّ الذي يسبقه مباشرة، وتسمّى القيمة الثابتة (الأساس) أو (الفرق المشترك).

يُعدّ التعلُّم باللعب من الأساليب التي تشجّع الطالب على التعلُّم وإنتاج المعرفة؛ فيمارس الطالب التعلُّم من دون أن يشعر بالملل، ويحقّق أهداف التعلُّم بعيدًا عن رتابة ما يحدث داخل الفصل الدراسي.

وتُعدّ ألعاب الليغو من الألعاب التي توظَّف بشكل كبير في التعلُّم خاصّة في تعلّم الأطفال؛ لما لها من أثر كبير في تشكيل المفاهيم الرياضيّة لدى الطلّاب.

سيُوظَّف هذا النوع من الألعاب في هذا النشاط؛ من أجل تعلّم بعض المفاهيم المتعلّقة بالمتتابعات والمتسلسلات الحسابيّة.

الأهداف الخاصّة بالنشاط

يتوقّع من الطالب أن:

- يوظّف ألعاب الليغو في بناء مجسّمات تتّبع نمطًا حسابيًّا.
- يمثّل المتتابعات الحسابيّة بيانيًّا.
- يتوصّل إلى قاعدة المتتابعة باستعمال صيغة الميل ونقطة.

נסרק עם CamScanner

العلاقات التكامليّة في النّشاط مع العلوم الأخرى:

الرياضيّات : استعمال مفاهيم المتتابعات الحسابيّة.

التقنية: توظيف التقنية في تمثيل الدوالّ بيانيًّا.

الهندسة: بناء أشكال هندسيّة تتّبع نمطًا حسابيًّا.
تحويل العلاقات الرياضيّة إلى تمثيلات بيانيّة.

تطبيقات حياتيّة: ربط المفاهيم الرياضيّة المتعلقة بالمتتابعات الحسابيّة بالمشكلات الحياتيّة.

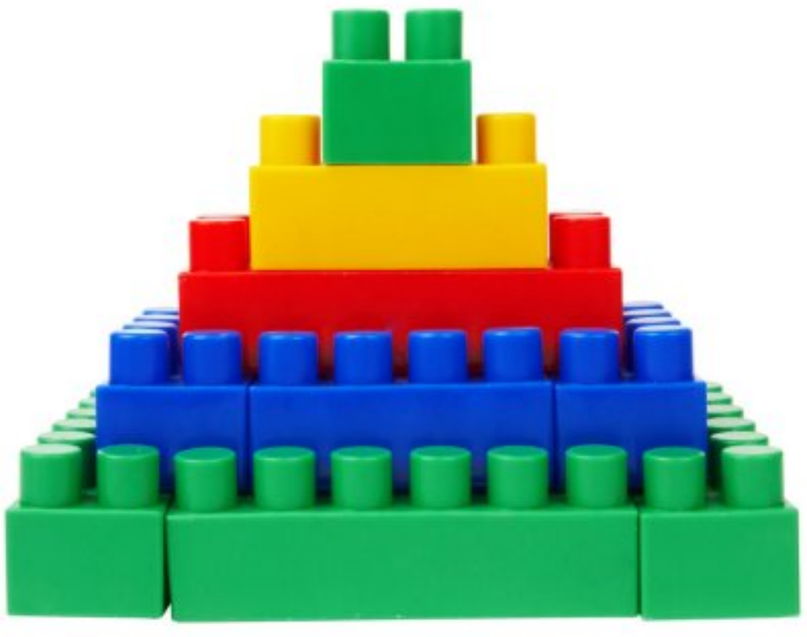
STEM

القوانين والمبادئ التكامليّة في النّشاط:

- إيجاد أساس المتتابعة الحسابيّة.
- التمثيل البياني للمتتابعة الحسابيّة.
- صيغة الميل ونقطة لكتابة قاعدة المتتابعة الحسابيّة.

النماذج والتصميم:

- هياكل هرميّة باستعمال قطع الليجو. (أدوات STEM)
- تمثيلات بيانيّة.



נסרק עם CamScanner

الموادّ والأدوات اللازمة:

قطع ليغو | جهاز حاسوب لوحي | برنامج الإكسل

التعلُّم القبلي:

- الدوال الخطيّة.
- التمثيل البياني للأزواج المرتّبة.

التعلُّم الرأسي:

- مفهوم المعادلة الخطيّة.
- التمثيل البياني للمعادلات الخطيّة.
- كتابة المعادلة الخطيّة بصيغ متعدّدة.

إجراءات تنفيذ النشاط:

- ستستخدم مع زملائك في المجموعة قطع الليغو لبناء هرم، بحيث تبدأ بتصميم القاعدة من عدد معيّن من القطع تحدِّده المجموعة، ثم يبدأ هذا العدد بالتناقص بمقدار ثابت كلّما ارتفع البناء إلى الأعلى،على أن ينتهي رأس الهرم بقطعة واحدة.
- بعد الانتهاء من بناء الهرم، أجب عن الأسئلة الآتية:
  - اكتب عدد القطع التي استعملتها في كلّ دور من أدوار البناء على صورة متتابعة.
  - ما مقدار الزيادة أو النقصان في كلّ حدّ عن الحدّ الذي يسبقه؟
  - هل الزيادة ثابتة أم متغيّرة في كلّ مرّة؟

נסרק עם CamScanner

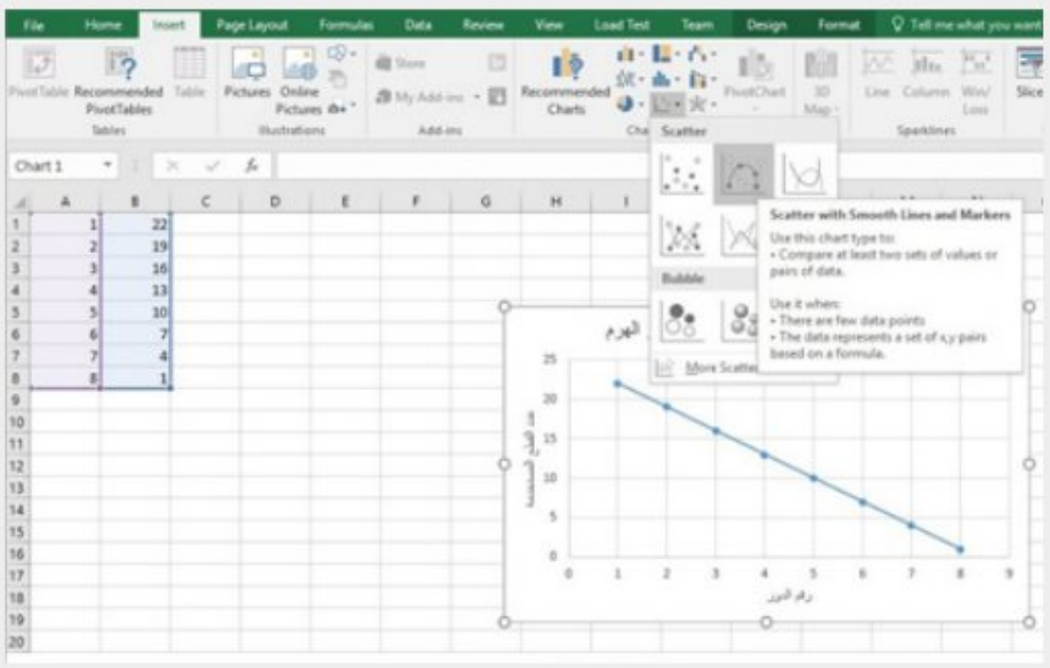
- ما نوع هذه المتتابعة؟
- ما أساس هذه المتتابعة؟
- ما حدّها الأوّل؟
- ما حدّها الأخير؟
- كم عدد حدودها؟
- هل هي متتابعة منتهية أم غير منتهية؟

مجالات تطبيق الموضوع في الحياة:

تستعمل المتتابعات في الظواهر جميعها التي يكون فيها مقدار الزيادة ثابتًا، ويظهر هذا التمثيل في العديد من المواقف الحياتيّة التي نعيشها بشكل يومي، فوقوفك في طابور تقديم الخدمة للجمهور عند مراجعة دائرة ما، وملاحظتك عدد المراجعين الذين تُقدَّم لهم الخدمة خلال الدقيقة الواحدة، يجعلك قادرًا على توقّع وقت الانتظار الذي ستقضيه حتى تصلك الخدمة، وكذلك الحال عند الطلب من أحد المطاعم التي تقدّم ورقة الدور، بحيث يُكتَب عليها عدد الزبائن الذين سبقوك في الطلب.

ستحتاج لتنفيذ هذا النشاط إلى جهاز حاسوب لوحي مزوّد بتطبيق إكسل.

استعمل البيانات التي حصلت عليها في النشاط الرئيس لتنفيذ ما يأتي.



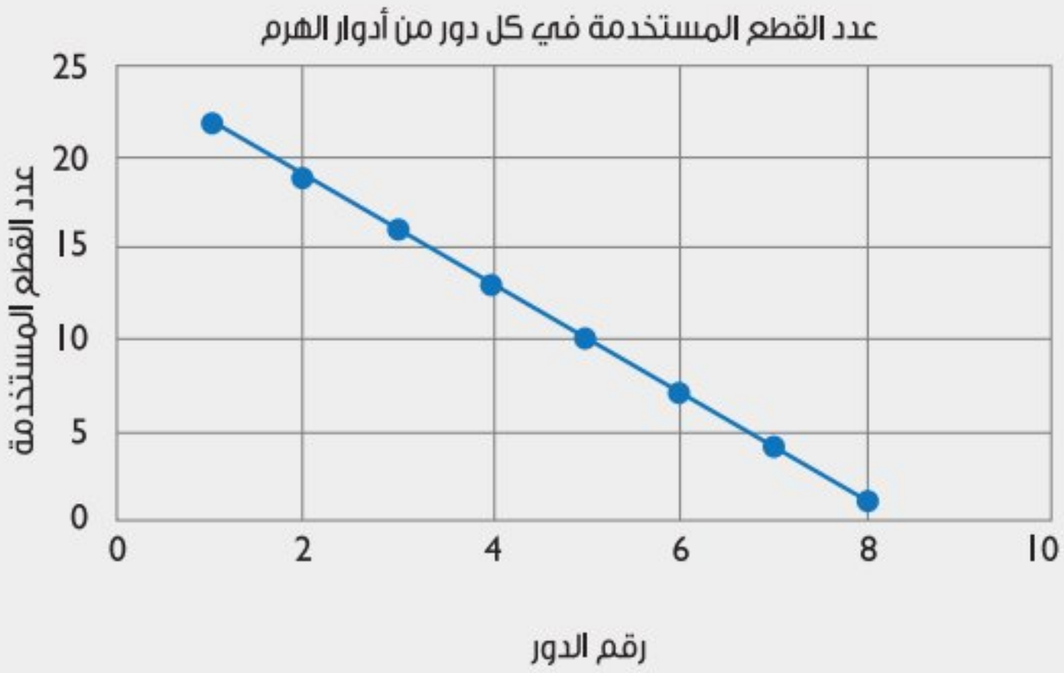
- أدخل البيانات التي حصلت عليها في النشاط الرئيس في صفحة إكسل تحت العمود B. (الصورة المجاورة تمثّل مثالًا مشابهًا للبيانات التي ستحصل عليها).
- تحت العمود A، أدخل الأرقام ١، ٢، ٣، ٤، ... لتقابل الأعداد جميعها في العمود B.(تذكر أنّ مجال الدالّة التي تمثّل المتتابعة هو مجموعة من الأعداد الطبيعيّة).

تنبؤ

נסרק עם CamScanner

تنبؤ

- ظلّل العمودين A و B كما في الصورة السابقة، ثم من قائمة insertاختر arts ثم scatter. (سيظهر لك رسم يشبه التمثيل البياني في الشكل الآتي.



- ما شكل التمثيل البياني الذي حصلت عليه؟
- احسب ميل الخط في التمثيل البياني. (استعمل إحداثيات أيّ نقطتين معلومتين لحساب الميل، من خلال قسمة فرق الإحداثي Y على فرق الإحداثي X).
- قارن قيمة الميل التي حصلت عليها بقيمة الأساس للمتتابعة التي نتجت في النشاط الرئيس. ماذا تلاحظ؟
- استعمل صيغة الميل ونقطة لكتابة قاعدة هذه المتتابعة.

تفسير وتحليل

ابحث في العلاقة بين قيمة أساس المتتابعة الحسابيّة إذا كان سالبًا أو موجبًا وشكل التمثيل البياني في الحالتين.

נסרק עם CamScanner

النشاط الأوّل

نشاط تطبيقي تكاملي

بـدأت إدارات الشـرطة في أنحـاء العالم جميعهـا بالاعتماد علـى الرياضيّات بشـكل كبير، من خلال بناء خوارزميّات خاصّة تستعمل بيانات الجرائم السابقة للتنبّـؤ بموعد ومـكان حدوث الجرائم في المسـتقبل؛ فعلى سـبيل المثال ساعد نظام (PredPol)– اختصارا لـ «الشرطة التنبّؤية» predictive policing– على خفض معدّل الجريمة في أجزاء من لوس أنجلوس بنسبة 12 %.

ابحـث عن تطبيق فـي العلوم الطبيعيّـة أو في المجالات الهندسـيّة يمكن تمثيلـه من خلال المتتابعات الحسـابيّة، موضّحًا كيف توظّف المتتابعات في هذا التطبيق.

نشاط التحقّق من التعلّم

يملـك مهنـد قطعـة أرض زراعيّـة على شـكل مثلّث فـي إحـدى محافظات المملكـة، ورغب في اسـتثمارها بزراعتها بشـجر النخيـل، فخطّط الأرض على شـكل صفـوف، ووضع فـي الصّـفّ الأوّل 20 نخلة، وكان كلّ صـفّ ينقص عن الـذي يليه بمقدار نخلتين، فإذا كان عدد الصفوف التي خططها مهند عشـرة صفوف،

- ما عدد أشجار النخيل التي زرعها مهند في الصّفّ الأخير؟
- ما مجموع أشجار النخيل التي زرعها مهند في قطعة الأرض؟

נסרק עם CamScanner

נסרק עם CamScanner

أنشطة الحقيبة

النشاط الرئيس الثاني:

السلّم الحسابي

زمن تنفيذ النشاط 60 دقيقة

נסרק עם CamScanner

المقدِّمة

يعـدُّ اسـتعمال الأدوات في التعلُّم من الوسـائل التي تسـاعد على تحقيق أهـداف التعلُّـم، مـن خلال دمـج الطلّاب فـي أنشـطة يشـاركون خلالها في تصميم الأدوات وتنفيذ النشاط، وهذا يخلق جوًّا من المتعة ورغبة في قضاء وقت أطول في التعلُّم.

الأهداف الخاصّة بالنشاط

يتوقّع من الطالب أن:

- يجد أوساطًا حسابيّة بين حدّين غير متتاليين في متتابعة حسابيّة.
- يوظّف الأوساط الحسابيّة في مواقف حياتيّة.

STEM

العلاقات التكامليّة في النّشاط مع العلوم الأخرى:

العلوم الطبيعيّة : يوظّف الطلّاب أدوات من الطبيعة لتنفيذ النشاط.

مشكلات حياتيّة: يضع الطلّاب خططًا للتوفير المالي.

נסרק עם CamScanner

القوانين والمبادئ التكامليّة في النّشاط:

- قانون الحدّ العام للمتتابعة الحسابيّة.

النماذج والتصميم:

تصميم نماذج خشبيّة من الطبيعة.

الموادّ والأدوات اللازمة:

قطع من الخشب | عدد من المسامير اللولبية | عدد من المفكّات

التعلُّم القبلي:

- معرفة قانون الحدّ النوني لمتتابعة حسابيّة.
- قانون محيط الدائرة.

التعلُّم القبلي:

- مفهوم المتتابعة.
- مفهوم المتتابعة الحسابيّة.
- الصيغ الرياضيّة التي تمثّل حدود المتتابعة الحسابيّة.
- تحديد قيمة أوساط حسابيّة بين عددين من أعداد المتتابعة الحسابيّة.
- تطبيق مفهوم المتتابعة الهندسّية في مواقف حياتيّة.

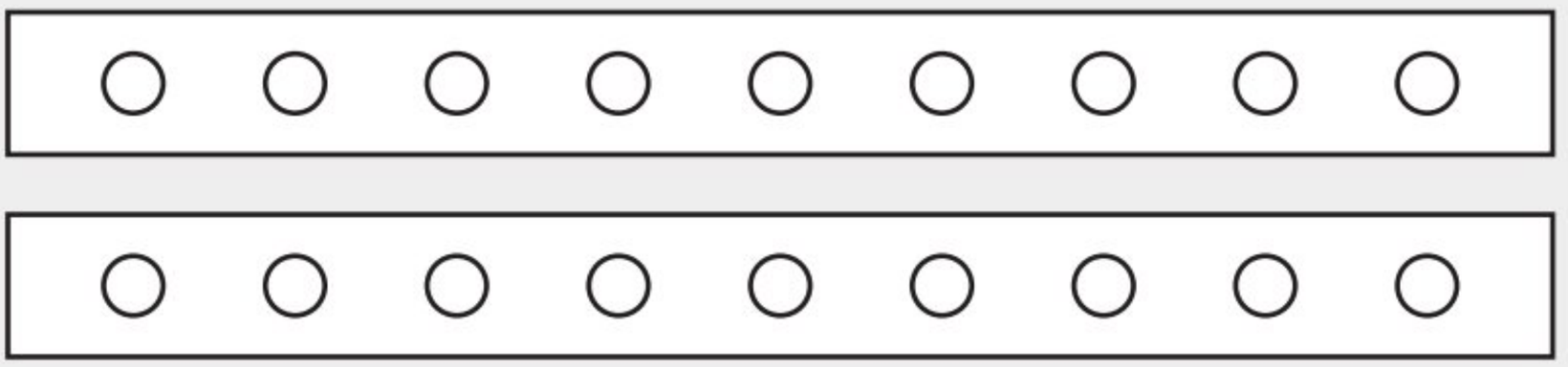
נסרק עם CamScanner

النشاط الثاني

السلّم الحسابي

إجراءات تنفيذ النشاط:

- يتطلب هذا النشاط تصميم شكل يشبه السلّم؛ لذلك ستحتاج إلى:
  - قطعتين خشبيّتين طويلتين مثقوبتين كما في الشكل أدناه.
  - قطع صغيرة من الخشب تمثّل درجات السلّم ومثقّبة من الأطراف كما في الشكل أدناه.
  - عدد من المسامير اللولبيّة لتثبيت الدرجات على السلّم.



- خذ عددًا معيّنًا من قطع الخشب الصغيرة (درجات السلم)، وشدّها مستعملًا المسامير اللولبيّة في مكان الدرجة الأولى على السلّم.
- خذ عددًا من قطع الخشب الصغيرة يزيد على عدد القطع السابقة بمقدار معيّن، وثبّته في مكان الدرجة الثانية.
- خذ عددًا من قطع الخشب الصغيرة، يزيد على عدد القطع السابقة بمقدار الزيادة السابقة نفسه، وثبّته في مكان الدرجة الثالثة.
- استمر بهذا الشكل حتى نهاية درجات السلم جميعها.
- سجّل عدد قطع الخشب الصغيرة في كلّ درجة من درجات السلّم على شكل متتابعة.
- ما نوع المتتابعة التي حصلت عليها؟
- ما أساس هذه المتتابعة؟
- بعد الانتهاء، فُكَّ القطع الخشبيّة باستثناء الأولى والأخيرة.
- الآن، تبادل القطع مع المجموعة المجاورة.

נסרק עם CamScanner

- على كلّ مجموعة اكتشاف النمط، وإعادة تركيب قطع السلّم من خلال الإجابة عن الأسئلة الآتية:
  - كم عدد القطع في الدرجة الأولى؟
  - كم عدد القطع في الدرجة الأخيرة؟
  - ما مقدار الزيادة في كلّ درجة حتى تصل لعدد القطع في الدرجة الأخيرة؟ (استعمل قانون الحدّ النوني لمعرفة مقدار الزيادة).
  - ماذا يمثّل هذا المقدار بالنسبة إلى المتتابعة؟
  - ما عدد القطع الخشبيّة التي تحتاجها في الدرجة الثانية من السلّم؟
  - ما عدد القطع الخشبيّة التي تحتاجها في الدرجة الثالثة من السلّم؟
  - أعد تركيب قطع الدرجات جميعها بناءً على مقدار الزيادة الذي حصلت عليه.
  - اكتب الحدَّ النوني لهذه المتتابعة.
  - تأكّد من صحّة الحدّ النوني الذي كتبته بمعرفة عدد القطع المستخدمة في الدرجة قبل الأخيرة.
  - قارن إجابتك مع النتائج التي سجّلتها المجموعة التي صمّمت السلم، وناقشهم في الحلّ الذي توصّلتم إليه.

مجالات تطبيق الموضوع في الحياة:

توجد العديد من الظواهر الطبيعيّة التي تتكرّر بشكل ثابت كلّ فترة من الزمن، ومن أشهر هذه الظواهر مشاهدة مذنّب هالي من كوكب الأرض كلّ 67 سنة، بالإضافة إلى العديد من التطبيقات في العلوم الطبيعيّة، فضلًا عن استخدامها في المجالات الماليّة وغيرها.

נסרק עם CamScanner

تنبؤ

لأيّ متتابعة حسابيّة مكوّنة من ثلاثة حدود معلوم حدّاها؛ الأوّل والثالث، اكتشف العلاقة الرياضيّة التي يمكن من خلالها إيجاد الحدّ الأوسط من دون الحاجة إلى معرفة قيمة الأساس.

تفسير وتحليل

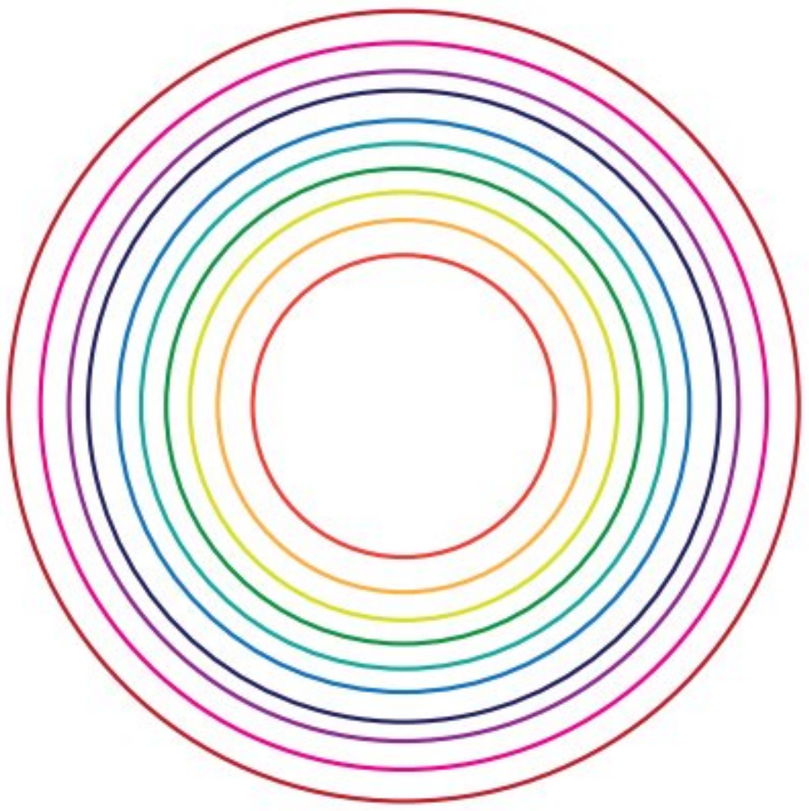
- وضّح بأمثلة العلاقة بين قيمة أساس المتتابعة الحسابيّة (من حيث إشارة الأساس) وقيمة حدود المتتابعة من حيث الزيادة والنقصان في القيم، وشكل التمثيل البياني لكلّ متتابعة.
- هل المتتابعة التي حدودها جميعها تتكوّن من العدد نفسه تُعدُّ متتابعة حسابيّة؟ فسّر ذلك.

נסרק עם CamScanner

النشاط الثاني

نشاط تطبيقي تكاملي

- إذا كانت لديك مجموعة من الدوائر المتداخلة والمشتركة في المركز، وكان نصف قطر أصغر دائرة 1 سم، ويزيد نصف قطر كلّ دائرة تليها بمقدار (1 سم). فإذا كان محيط الدائرة الأولى (الصغرى) (2π)، ومحيط الدائرة السادسة (12π)، فأوجد محيط كلّ دائرة بينهما. ماذا تلاحظ؟
- فكِّر في متتابعة حسابيّة يمكن تشكيلها من هذا النشاط.



نشاط التحقّق من التعلّم

أراد سلمان توفير مبلغ لشراء هديّة لأمّه عند عودتها من الحج في السنة المقبلة، فإذا وفَّر في الشهر الأوّل 9 ريالات، وفي الشهر الثاني عشر 86 ريالًا، وإذا علمت أنَّ مقدار الزيادة في التوفير الشهري كان مقدارًا ثابتًا، فما عدد الريالات التي وفَّرها في كلّ شهر من الشهر الثاني ولغاية الشهر الحادي عشر؟

- إذا كانت قيمة الهدية التي قرّر سلمان شراءها 3000 ريال، فهل يكفي المبلغ الذي سيوفره في نهاية المدّة لشراء الهدية؟
- إذا كان المبلغ الذي سيجمعه سلمان غير كافٍ، فساعده على وضع خطة توفير جديدة يستطيع من خلالها شراء الهديّة لأمه.

נסרק עם CamScanner

נסרק עם CamScanner

أنشطة الحقيبة

النشاط الرئيس الثالث:

الربوت

زمن تنفيذ النشاط 60 دقيقة

נסרק עם CamScanner

النشاط الثالث

الربوت

المقدِّمة

تظهـر الرياضيّـات في مجالات الحيـاة جميعها ومن أبســطها عمليّـات البيع والشــراء، وتخدم جوانــب العلوم الطبيعيّـة جميعها؛ كالفيزيـاء والكيمياء والأحياء وكذلك العلوم الهندســيّة المختلفة. ونظرًا لذلك؛ فبالإمكان القول إنّ التقـدُّم الرياضــيّ جعل حياة البشــريّة أفضل وأســهل. وقد تعــدَّدت فروع الرياضيّـات وموضوعاتها، ومــن أهمّ هذه الموضوعات موضــوع المتتابعات والمتسلسلات.

تؤثر المتتابعات في فهم الكثير من الظواهر الطبيعيّة التي تتّبع نمطًا معيّنًا فــي ترتيبهــا؛ فالناظر إلى بعض أنــواع الزهور يلاحظ ترتيبًــا متقنًا لبتلات هذه الزهــور الداخليّة؛ حيث تكــون مرتّبة في حلقات دائريّة، وكلّما اتّســعت الدائرة مبتعدة عــن مركز الزهرة، زاد عدد تلك البتلات.وتزيد جماليّة الأبنية المعماريّة التي تتّبع نمطًا معماريًّا عن غيرها، وتظهر مثل هذه الأنماط في العديد من الأبنيــة المعماريــة في المملكة؛ مثــل مكتبة الملك فهد، وبــرج الفيصليّة، وبرج المملكة، والعديد من الأبنية التي أضفى عليها وجود الأنماط الرياضيّة جمالًا وإبداعًا.

الأهداف الخاصّة بالنشاط

يتوقّع من الطالب أن:

- يوظّف المتتابعات والمتسلسلات الحسابيّة في حساب مجموع المسافات التي يقطعها جسم يتحرّك بسرعة ثابتة.
- يكتشف أنماطًا حسابيّة.
- يبني أنماطًا حسابيّة جديدة.

נסרק עם CamScanner

STEM

العلاقات التكامليّة في النّشاط مع العلوم الأخرى:

اعتُمد في تنفيذ هذا النشاط على إجراء تجربة فيزيائيّة مبنيّة على تحرّك جسم بسرعة ثابتة، وإيجاد مجموع المسافات التي يقطعها هذا الجسم في أثناء حركته. واستُعمل الروبوت وهو من أهمّ عناصر التقنية الحديثة في تنفيذ هذه التجربة. كما وظّف النشاط عنصرًا آخر من عناصر التقنية وهو الحاسوب؛ لتنفيذ التمثيلات البيانيّة الهندسيّة ذات الشكل الخطي التي تمثّل في حقيقتها متتابعة حسابيّة.

القوانين والمبادئ التكامليّة في النّشاط:

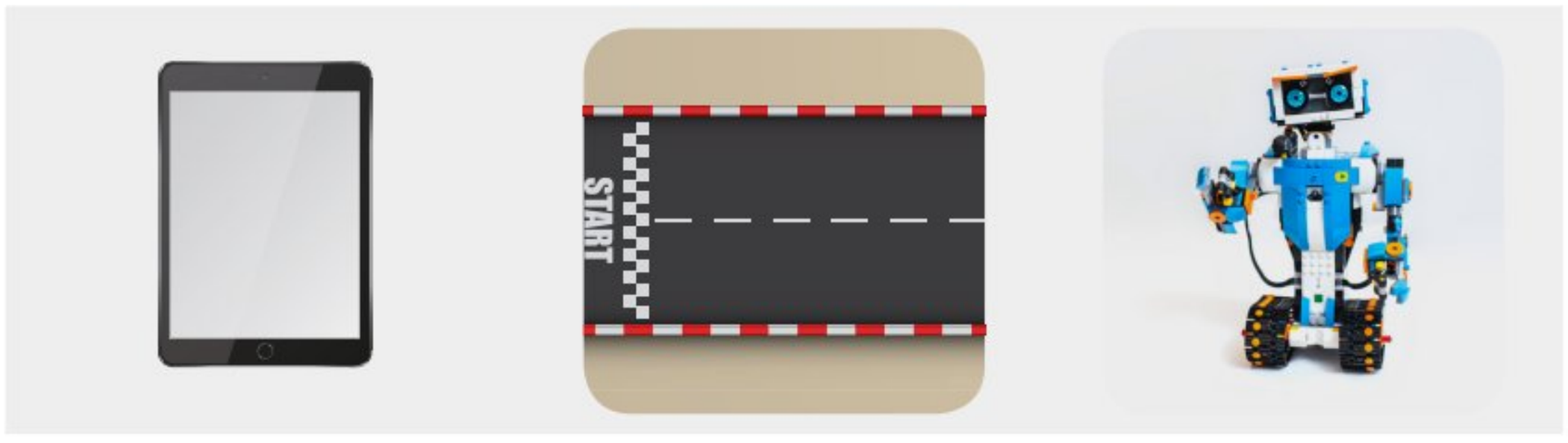
- السرعة.
- السرعة الثابتة.
- قانون مجموع حدود المتسلسلة الحسابيّة.

النماذج والتصميم:

- تصميم تجربة فيزيائيّة تعتمد على حركة الجسم بسرعة ثابتة، ومعرفة مجموع المسافات التي يقطعها في فترة زمنيّة معيّنة.

נסרק עם CamScanner

الموادّ والأدوات اللازمة:



روبوت | مسار مدرّج بتدريج متري | جهاز حاسوب لوحي مزوّد بتطبيق إكسل

التعلُّم القبلي:

- مفهوم المتتابعة.
- مفهوم المتسلسلة.
- العلاقات الدالية للمتتابعات وتمثيلاتها البيانيّة.
- العمليّات الحسابيّة.
- حلّ المعادلات الخطيّة.

التعلُّم الرأسي:

- مفهوم المتتابعة.
- التمثيل البياني للمتتابعات.
- العلاقات الدالّية للمتتابعات.
- مفهوم المتسلسلة.
- أنواع المتسلسلات من حيث عدد الحدود.
- تنفيذ عمليّات حسابيّة مرتبطة بإيجاد مجموع عدد من الحدود.

נסרק עם CamScanner

إجراءات تنفيذ النشاط:

- ستحتاج في تنفيذ هذا النشاط إلى تصميم مسار مدرّج بوحدة المتر. تعاون مع زملائك في المجموعة على إنشاء هذا المسار قبل البدء بالنشاط.
- حدّد نقطة الانطلاق على المسار المدرّج.
- حدّد خط نهاية المسار على بُعد 20 مترًا من خط البداية.
- برمج الروبوت على سرعة مترين لكلّ دقيقة خلال الدقيقة الأولى، وتزداد سرعته بمقدار مترين لكلّ دقيقة، لتصبح 4 أمتار لكلّ دقيقة خلال الدقيقة الثانية، وهكذا.
- جهّز ساعة التوقيت.
- أطلق الروبوت على المسار، وفي اللحظة نفسها شغّل ساعة التوقيت.
- سجّل المسافات التي قطعها الروبوت خلال كلّ دقيقة.
- كم دقيقة احتاج الروبوت لإنهاء مسافة المسار؟
- اكتب المسافات التي قطعها الروبوت خلال كلّ دقيقة على شكل متتابعة.
  - ما نوع هذه المتتابعة؟
  - ما حدّها الأوّل؟ وما حدّها الأخير؟
  - ما أساسها؟
- مثّل قيم المتتابعة بيانيًّا باستعمال جهاز الحاسوب اللوحي.

مجالات تطبيق الموضوع في الحياة:

تدخل المتتابعات والمتسلسلات الحسابيّة في العديد من مجالات الحياة التي يتخذ نمط الزيادة فيها مقدارًا ثابتًا، وخاصّة في مجالات التعاملات الماليّة والأشكال الهندسيّة المعماريّة، بالإضافة إلى العديد من التطبيقات في العلوم الطبيعيّة.

נסרק עם CamScanner

تنبؤ

حاول جمع الأعداد من 1 إلى 100 في دقيقة، بشـرط عدم استعمال الطريقة العاديّة في جمع الأعداد المتوالية. (فكِّر بطريقة جديدة وسريعة).

اقرأ القصّة الآتية:

«يحكـى أنّ أحد مُدرِّسـي الرياضيّات في زمن ما، أراد فـي أحد دروس الرياضيّات أن يتحدّى طلّابه في سرعة حلِّهم لسؤال ما؛ فطلب إليهم أن يجمعوا الأعداد مـن 1 إلـى 100، وبعد ثـوانٍ قليلة تفاجأ المـدرّس بأحد الطـلّاب ويدعى (كارل جـاوس) يعطيـه الإجابة؛ فكيف عـرف جاوس الإجابـة؟ وما الطريقـة التي فكّر بها لتعطيه الإجابة الصحيحة بهذه السـرعة؟ لقد اسـتعمل جاوس ما يسمّى قوانين المتسلسـلات الحسـابيّة التي تسـتطيع من خلالهـا معرفة مجموع عدد كبير من الأعداد المتتابعة، شـرط أن يكـون الفرق بين كلّ عددين متتابعين مقدارًا متساويًا».

- حُلَّ مع زملائك فـي المجموعـة ورقة العمـل (1) التـي تهدف إلـى التوصّل إلـى صيغـة رياضيّـة لحـدود المتتابعـة الحسـابيّة، مـن خـلال حـلِّ المشـكلة التي طرحت فـي بداية النشـاط الاستكشـافي.

تفسير وتحليل

1. لديك المجموع الآتي: $\sum_{k=1}^{n}(2k+2)$
   - اعمل جدولًا للمجاميع الجزئيّة للمتسلسلة، حيث $1 \le k \le 10$
   - مثّل بيانيًّا المجاميع الجزئية التي أوجدتها فـي الفرع السـابق، وذلـك بتمثيل النقاط $(k\ ,\ S_k)$
   - مثّل الدالـة $f(x) = x^2 + 3x$ بيانيًّا علـى المسـتوى الإحداثي نفسـه؛ حيث $1 \le x \le 10$
   - ماذا تلاحظ حول التمثيلين البيانيين؟
   - مـاذا تسـتنتج حـول العلاقة بيـن التمثيل البيانـي للدالّة التربيعيّـة والتمثيل البياني لمجموع المتسلسـلة الحسـابيّة؟
2. يملك فهد 1000 ريال، ويحتاج إلى جمع مبلغ 7250 ريالًا لشـراء سيّارة. ضع خطة توفير شـهري لمسـاعدة فهد على توفير هـذا المبلغ؛ بحيث يكـون مقدار التوفير الشـهري ثابتًا، ولا يزيد مقـدار التوفير على 300 ريال شهريًّا.

נסרק עם CamScanner

الربوت

نشاط تطبيقي تكاملي

- معتمدًا البيانات التي حصلت عليها في النشاط الرئيس، افترض عدم وجود خط نهاية لمسار الروبوت، وأكمل الجدول الآتي:

الزمن (دقيقة)	المسافة المقطوعة خلال الدقيقة(متر)	مجموع المسافات المقطوعةفي نهاية كلّ دقيقة (متر)
1		
2		
3		
4		
5		
6		
100		
1000		

- هل استطعت ملء الصفّين الأخيرين؟ (بالتأكيد واجهت صعوبة في معرفة المسافة التي سيقطعها الروبوت لو استمر في السير لمدّة ألف دقيقة). فما الحلّ؟
- استعمل قانون الحدّ النوني لإيجاد قيمة المسافة المقطوعة خلال الدقيقة 1000.
- استعمل صيغة قانون المجموع التي حصلت عليها في النشاط الاستكشافي؛ لتجد مجموع المسافات المقطوعة بعد نهاية الدقيقة الألف.
- تأكد من صحّة الصيغة التي توصّلت إليها بتطبيقها على الدقائق الثلاثة الأولى.

נסרק עם CamScanner

النشاط الثالث

الربوت

نشاط
التحقّق من التعلّم

- خلال استعداده لأحد سباقات الجري لمسافات طويلة، يخطط يوسف للتدرُّب على الجري لمسافة 3 أميال يوميًّا في الأسبوع الأوّل، ومن ثم يزيد المسافة بمقدار نصف ميل أسبوعيًّا.

1. اكتب معادلة الحدّ النوني لهذه المتتابعة.
2. اذا استمرّ يوسف على هذا النمط، ففي أيِّ أسبوع يقطع مسافة 10 أميال يوميًّا؟
3. هل يعدُّ الاستمرار على هذا النمط إلى ما لانهاية منطقيًّا؟ وضِّح إجابتك.

נסרק עם CamScanner

ملحقات
النشاط الثالث

ورقة عمل (١)

نسرق عم CamScanner

اسم المجموعة: ..... المقرّر: ..... المستوى: .....

- اجمع الأعداد من 1 إلى 10 باستعمال الحاسبة، وسجّل الناتج.
- أكمل الجدول الآتي الذي يمثّل دراسة لحدود المتتابعة:

10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 حيث:

الصّفّ الأوّل يمثّل الحدود بالترتيب.

الصّفّ الثاني يمثّل الحدود معكوسة.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
المجموع										

- أوجد المجموع في كل عمود.
- أوجد المجموع الكلّي للمجاميع السابقة.
- اقسم الناتج على العدد 2.
- قارن الناتج الذي توصّلت إليه مع ما توصّلت إليه بالآلة الحاسبة في أوّل خطوة.
- ماذا تستنتج؟
- اجمع العدد الأوّل مع العدد الأخير من حدود المتتابعة.
- اضرب الناتج في عدد الحدود.
- اقسم الناتج على العدد 2.
- ماذا تلاحظ؟
- هل تستطيع الآن إيجاد ناتج جمع الأعدادمن 1 إلى 100؟
- اكتب صيغة رياضيّة لإيجاد ناتج جمع حدود متسلسة حسابيّة.

مع أطيب تمنياتي لكم بالتوفيق

נסרק עם CamScanner

أنشطة الحقيبة

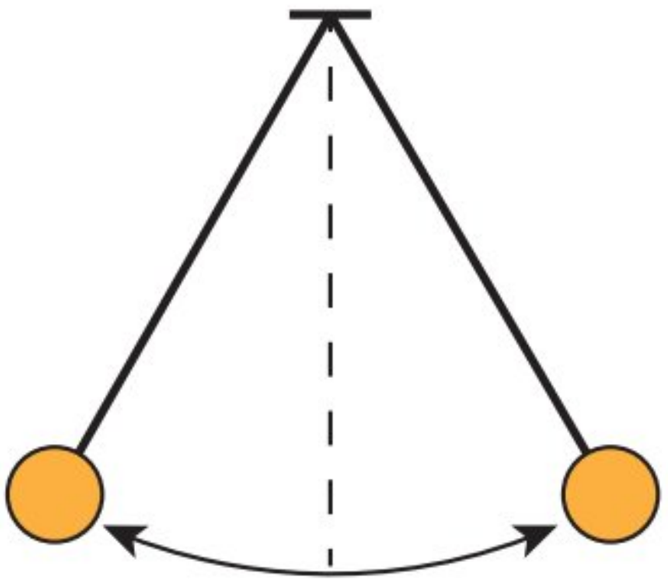
النشاط الرئيس الرابع:

البندول

زمن تنفيذ النشاط 60 دقيقة

نסרק עם CamScanner

المقدِّمة



يعـدُّ التعلُّـم باللعـب والتعلُّـم بالعمـل والمشـاركة مـن أهـمّ إسـتراتيجيّات التعلُّم التـي تخلـق للمتعلّـم فرصـة لإثبـات الـذات والمشـاركة الفاعلـة فـي تحقيـق التعلُّـم، وتخلـق كذلـك فرصًـا للطـلّاب المنعزليـن للاندمـاج مـع الطـلّاب الآخريـن، وتخلـق جـوًّا مـن المرح والمتعة في أثنـاء التعلُّم؛ لذلك سنركز في هذا النشاط على هذا الجانب المهمّ لتحقيق أهداف النشاط.

البنـدول البسـيط يتكـوّن من ثقـل مثبّت في طـرف خيط، بحيث يتحـرّك الثقل بشـكل قوسي بعد شـدّه لمسـافة معيّنة، وتركه يتأرجح. وتسمّى حركته ذهابًـا وإيابًـا اهتزازة. ويتغيّر زمـن كلّ اهتزازة من مكان إلى آخر بسـبب اختلاف قوّة الجذب الأرضي باختلاف الارتفاع عن مستوى سطح الأرض، حيث يستغرق بنـدول بسـيط طوله ٢٤٫٨ سـم مثبّت عند سـطح البحر ثانية واحـدة ليكمل الاهتـزازة الواحـدة. والبنـدول الذي لـه أربعة أمثال هـذا الطول له فتـرة اهتزاز قدرها ثانيتان، أما الذي له تسـعة أمثـال هذا الطول فتكون فترة اهتزازه ثلاث ثوانٍ.

يسـتخدم البنـدول في كثير مـن التجـارب الفيزيائيّة، ومنها إثبـات قيمة ثابت الجاذبيّـة الأرضيّة، ويسـتخدم أيضًا فـي إيجاد عزم القصور الذاتي لأيّ جسـم مهما كان شكله.

الأهداف الخاصّة بالنشاط

يتوقّع من الطالب في نهاية هذا النشاط أن:

- يوظّف التجارب الفيزيائيّة (حركة البنـدول) في تعـرُّف مفهـوم المتتابعات الهندسـيّة وتطبيقاتها العمليّة.
- يجد أوساطًا هندسيّة بين حدّين غير متتاليين في متتابعة هندسيّة.
- يوظّف الأوساط الهندسيّة في مواقف حياتيّة.

נסרק עם CamScanner

STEM

العلاقات التكامليّة في النّشاط مع العلوم الأخرى:

اعتُمِدت حركة البندول في بناء هذا النشاط، حيث يستخدم البندول في كثير من التجارب الفيزيائيّة، ومنها إثبات قيمة ثابت الجاذبيّة الأرضيّة، ويستخدم أيضًا في إيجاد عزم القصور الذاتي لأيّ جسم مهما كان شكله. (فيزياء). كما وظِّفت التقنية بشكل كبير في هذا النشاط بالاعتماد على استعمال الحاسوب والآلة الحاسبة والبرمجيّات التطبيقيّة، وكان للهندسة كذلك دور واضح في هذا النشاط من خلال التمثيلات البيانيّة للعلاقات الرياضيّة.

القوانين والمبادئ التكامليّة في النّشاط:

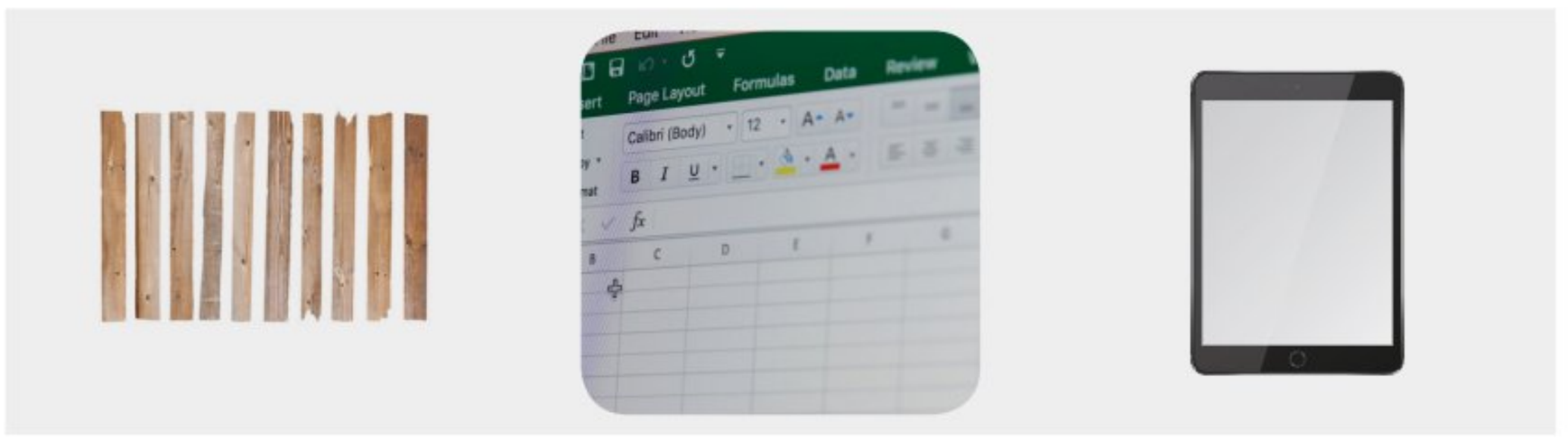
- حركة البندول.
- حدود المتتابعة الهندسيّة وأساسها وحدّها النوني.
- استعمال التطبيقات الحاسوبيّة.
- القدرة على البحث والاستقصاء.

النماذج والتصميم:

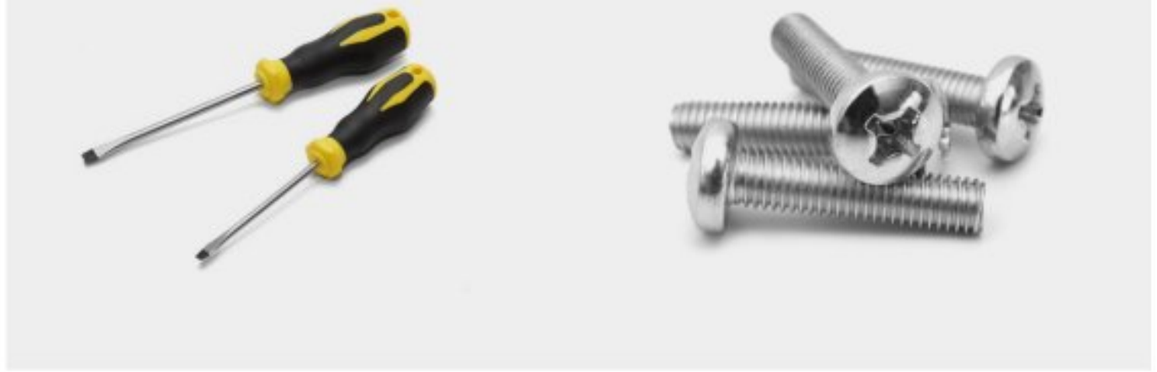
- التطبيقات الحاسوبيّة.
- التمثيلات البيانيّة.
- تصميم نماذج خشبيّة من الطبيعة.

נסרק עם CamScanner

الموادّ والأدوات اللازمة:



جهاز حاسوب لوحي — تطبيق إكسل — قطع من الخشب



عدد من المسامير اللولبيّة — عدد من المفكّات

التعلُّم القبلي:

- المتتابعات.
- الحدّ النوني للمتتابعة الهندسيّة.
- القدرة على إجراء العمليّات الحسابيّة.
- مفهوم الدالة الأسّية.
- التمثيل البياني للدوالّ الأسّية.

التعلُّم الرأسي:

- مفهوم المتتابعات الهندسيّة.
- العلاقات الدالّية المتعلقة بالمتتابعات الهندسيّة.
- مفهوم الأوساط الهندسيّة.
- إدخال أوساط هندسيّة بين حدّين من حدود متتابعة هندسيّة.
- تطبيق التعلُّم في مواقف حياتيّة، وحلّ المشكلات.

נסרק עם CamScanner

إجراءات تنفيذ النشاط:

- يقطع بندول مسافة 40cm في الاهتزازة الأولى، ويستمر في الحركة بعد ذلك ليقطع 80% من كلّ اهتزازة سابقة، فإذا استمرّ البندول على هذا المنوال، فما المسافة التي سيقطعها في الاهتزازة العاشرة؟

رقم الاهتزازة	المسافة المقطوعة (cm)	العمليّة الحسابيّة
1	40	.....
2	..... = ... x	.....
3	..... = ... x	.....
4	..... = ... x	.....
5	..... = ... x	.....
6	..... = ... x	.....
7	..... = ... x	.....
8	..... = ... x	.....
9	..... = ... x	.....
10	..... = ... x	.....

- ما أساس هذه المتتابعة؟
- ما نوع هذه المتتابعة؟
- لو استمرّ البندول في الحركة، فما قيمة الاهتزازة رقم (20)؟
- اكتب الحدّ النوني الذي يمثل اهتزازات البندول.
- استعمل الحدّ النوني لإيجاد المسافة المقطوعة في الاهتزازة رقم (30). (استعمل الآلة الحاسبة).
- استعمل الحدّ النوني لإيجاد المسافة المقطوعة في الاهتزازة رقم (100). (استعمل الآلة الحاسبة).
- ماذا تلاحظ؟

נסרק עם CamScanner

مجالات تطبيق الموضوع في الحياة:

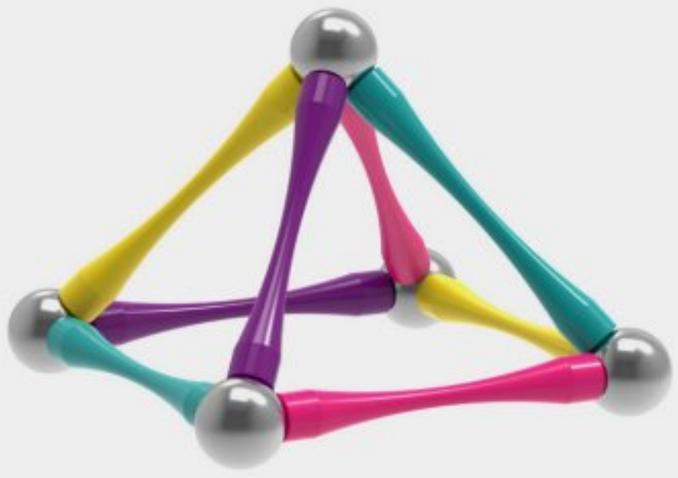
كثيـر من المهن التي تسـتعمل الرياضيّـات تهتم في كثير من الأحيان في البحث عـن الأنماط؛ لما لذلك مـن أهمّيّـة بالغـة فـي التنبّؤ بالمسـتقبل، وقد بـدأت إدارات الشـرطة فـي العقد الماضي فـي أنحاء العالـم جميعها بالاعتماد على الرياضيّات بشـكل كبير، من خلال بناء خوارزميّات خاصّة تسـتعمل بيانات الجرائم السـابقة للتنبّؤ بموعد ومكان حدوث الجرائم في المسـتقبل، فعلى سبيل المثال، ساعد نظام (PredPol)– اختصار لـ «الشرطة التنبّؤية» predictive policing– على خفض معدّل الجريمة في أجزاء من لوس أنجلوس بنسبة 12%.

كمـا اتّضـح أنّ الزلازل تتّبع أنماطًا في حدوثهـا، فقد يؤدّي الزلزال إلى هـزّات ارتداديّة بعد حدوثه. ويطلق عليهـا فـي الرياضيّـات اسـم «العمليّات المثيـرة الذاتيّـة» "sefl - exciting processes"، حيـث توجـد معادلات تساعد على التنبّؤ بموعد حدوث العمليّة التالية، ما يساعد الدول على أخذ الاحتياطات اللازمة قبل وقوع الكوارث.

يبحث المصرفيون أيضًا في البيانات التاريخيّة عن أسعار الأسهم وأسعار الفائدة وأسعار صرف العملات؛ لمعرفـة كيف سـتتغيّر الأسـواق الماليّة في المسـتقبل، ومن ثم تحقيـق الأرباح؛ فالقـدرة على التنبّؤ بارتفاع قيم الأسهم وانخفاضها من الممكن أن تجعلها مربحة للغاية.

(A)

- اسـتعمل القطع الممغنطة (وهـي من أدوات STEM التعليميّة)؛ من أجل تصميم أشكال تتّبع في تصميمها شكل المتتابعة الهندسيّة.



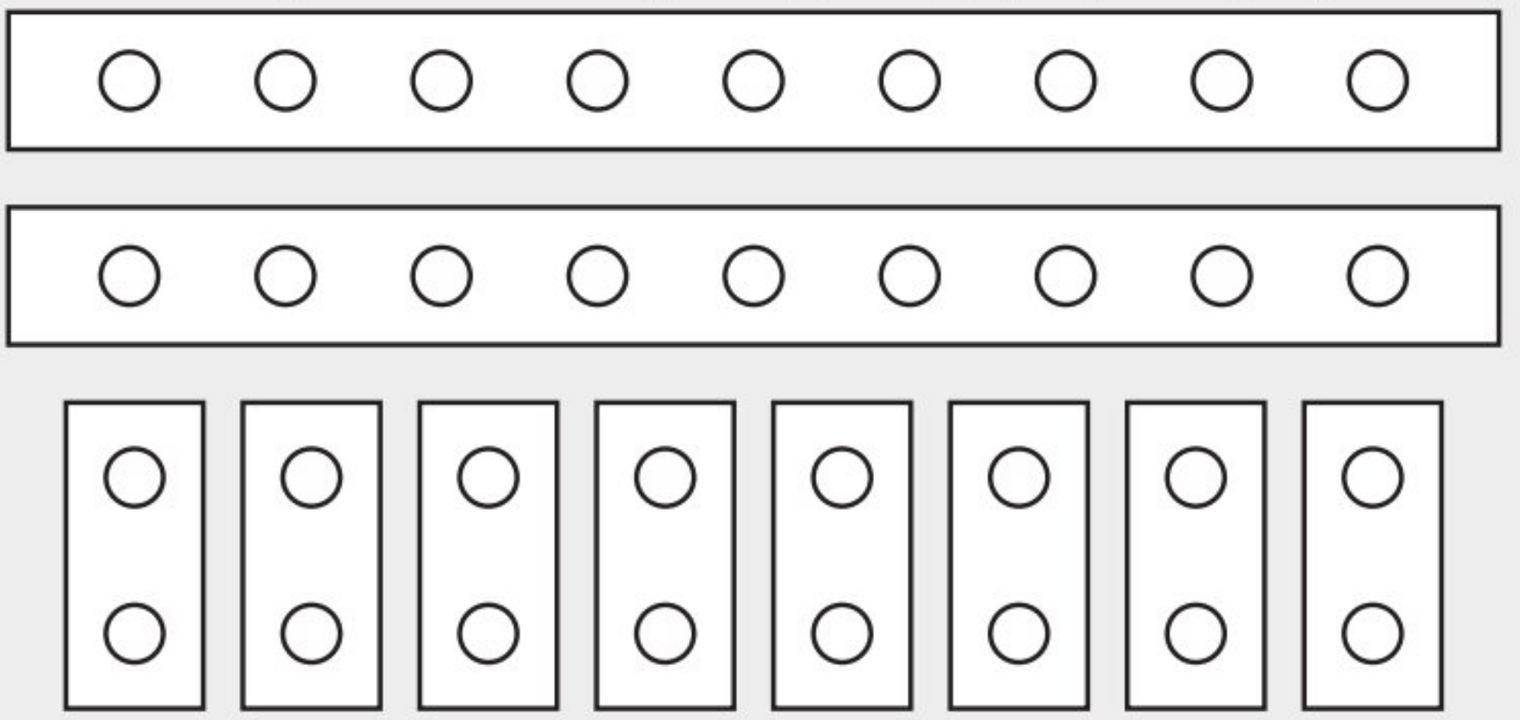
تنبؤ

נסרק עם CamScanner

البندول

(B)

- يتطلّب هذا النشاط تصميم شكل يشبه السلّم؛ لذلك ستحتاج إلى:
  - قطعتين خشبيّتين طويلتين مثقوبتين، كما في الشكل الآتي.
  - قطع صغيرة من الخشب تمثّل درجات السلّم ومثقّبة من الأطراف، كما في الشكل الآتي.
  - عدد من المسامير اللولبية لتثبيت الدرجات على السلّم.



- خذ عددًا قليلًا من قطع الخشب الصغيرة (درجات السلّم) لا يزيد على اثنتين، وشدّها مستعملًا المسامير اللولبيّة في مكان الدرجة الأولى على السلّم.
- خذ ضعف العدد من قطع الخشب الصغيرة، وثبّته في مكان الدرجة الثانية.
- خذ ضعف عدد قطع الخشب الصغيرة الموجودة في الدرجة الثانية، وثبّتها في مكان الدرجة الثالثة.
- استمرّ بهذا الشكل على ألّا يزيد عدد الثقوب المستخدمة من ثقوب أرجل السلم على أربعة.
- سجّل عدد قطع الخشب الصغيرة في كلّ درجة من درجات السلّم على شكل متتابعة.
- ما نوع المتتابعة التي حصلت عليها؟
- ما أساس هذه المتتابعة؟
- بعد الانتهاء، فُكَّ القطع الخشبيّة باستثناء الأولى والأخيرة.
- الآن، تبادل القطع مع المجموعة المجاورة.

تنبؤ

נסרק עם CamScanner

النشاط الرابع

البندول

تنبؤ

- على كلّ مجموعة اكتشاف النمط، وإعادة تركيب قطع السلّم من خلال الإجابة عن الأسئلة الآتية:
  - كم عدد القطع في الدرجة الأولى؟
  - كم عدد القطع في الدرجة الأخيرة؟
  - ما نسبة الزيادة في كلّ درجة حتى تصل إلى عدد القطع في الدرجة الأخير (استعمل قانون الحدّ النوني لمعرفة نسبة الزيادة).
  - ماذا يمثّل هذا المقدار بالنسبة إلى المتتابعة؟
  - ما عدد القطع الخشبيّة التي تحتاجها في الدرجة الثانية من السلّم؟
  - ما عدد القطع الخشبيّة التي تحتاجها في الدرجة الثالثة من السلّم؟
  - أعد تركيب قطع الدرجات جميعها بناءً على مقدار الزيادة الذي حصلت عليه.
  - اكتب الحدَّ النوني لهذه المتتابعة.
  - تأكّد من صحّة الحدّ النوني الذي كتبته، بمعرفة عدد القطع المستخدَ في الدرجة قبل الأخيرة.
  - قارن إجابتك مع النتائج التي سجّلتها المجموعة التي صمّمت السلّ وناقشهم في الحلّ الذي توصّلتم إليه.

تفسير وتحليل

- سيتوقف البندول عن الحركة بعد مدّة من الزمن، وهذا يعني أنَّ الحدَّ الأخير في المتتابعة الهندسيّة سيكون صفرًا، ولكن؛ هل يمكن الحصول رياضيًّا على الحدّ الصفري؟ فسِّر إجابتك.
- ماذا يسمّى هذا النوع من المتسلسلات الهندسيّة؟

נסרק עם CamScanner

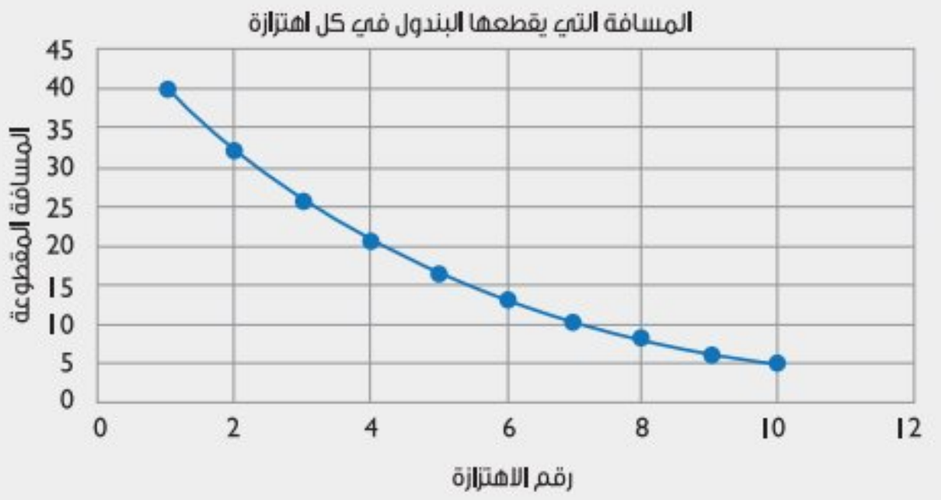
البندول

نشاط تطبيقي تكاملي

ستحتاج في تنفيذ هذا النشاط إلى استعمال حاسوب لوحي مزوّد بتطبيق إكسل.

يعتمد هذا النشاط على البيانات التي حصلت عليها في النشاط الرئيس.

- افتح صفحة إكسل.
- أدخل تحت العمود A الأعداد من 1 إلى 10. والتي تمثّل رقم الاهتزازة في البندول.
- في أوّل خليّة في العمود B، أدخل العدد 40. وفي الخليّة التي تليها طبّق المعادلة ($1B * 0.4 =$). ستحصل على قيم الاهتزاز في كلّ مرة.
- اسحب المعادلة حتى تنطبق على الخلايا جميعها من B2 ولغاية B10.
- قارن القيم التي حصلت عليها بقيم الجدول في النشاط الرئيس.
- ظلّل العمودين A و B.
- من قائمة insert اختر chart، ثم scatter. ستحصل على التمثيل البياني كما في الشكل الآتي:



- ماذا تلاحظ على التمثيل البياني لهذه المتتابعة؟ هل هو خطي أم غير خطي ؟
- ما نوع المتتابعات التي يمثّلها مثل هذا النوع من التمثيلات البيانيّة؟
- هل يمكنك إيجاد قاعدة هذه العلاقة من خلال الرسم؟ لا بدّ أنّك لاحظت صعوبة معرفة قاعدة هذه العلاقة من خلال الرسم؛ لذلك نعتمد قانون الحدّ النوني لإيجاد قاعدة هذه العلاقة.

נסרק עם CamScanner

نشاط
التحقّق من التعلّم

- نتيجة للأمطار الغزيرة، ارتفع منسوب المياه في بركة في اليوم الأوّل 3 سم، فإذا كانت الزيادة في كلّ يوم ضعف الزيادة في اليوم السابق لمنسوب المياه في كلّ من الأيام الأربعة التالية، فكم سنتيمترًا ارتفع منسوب المياه في البركة في اليوم الخامس؟
- إذا كانت h وسطًا هندسيًّا للعددين m و n ، فابحث عن علاقة رياضيّة تمكنك من كتابة h2 بدلالة كلّ من m و n .
- أوجد وسطين هندسيين بين العددين 2,16-.
- أوجد ثلاثة أوساط هندسيّة بين العددين 10,810.

נסרק עם CamScanner

أنشطة الحقيبة

النشاط الرئيس الخامس:

المربّعات المتداخلة

زمن تنفيذ النشاط 90 دقيقة

נסרק עם CamScanner

النشاط الخامس

المربّعات المتداخلة

المقدِّمة

تزيـد الأشـكال الهندسـيّة المتداخلة من جماليّـة التصاميم الهندسـيّة التي تتبع هذا الأسـلوب، خاصّـة إذا كان هذا التداخل يتّبع نمطًا هندسـيًّا (متتابعة هندسـيّة). يوظِّـف هـذا النشـاط مثـل هذه الأشـكال فـي توضيـح مفهوم المتتابعـات الهندسـيّة، مـن خـلال ربط تعلّـم الرياضيّـات بالهندسـة، وتنفيذ الطلّاب مثل هذه الأشكال بواسطة الأدوات الهندسيّة.ر

الأهداف الخاصّة بالنشاط

يتوقّع من الطالب أن:

- يجد مجموع عدد من حدود متتابعة هندسيّة.

STEM

العلاقات التكامليّة في النّشاط مع العلوم الأخرى:

يربـط النشـاط بيـن المفاهيـم الرياضيّـة (مفهـوم المتتابعـة الهندسـيّة) والهندسـة المعماريّة التي تهتمّ بالتصاميم المعماريّة. كما يوظّف التقنية المتمثّلة في الحاسـوب اللوحي فـي عمل التمثيلات البيانيّة، واسـتعمال المجسّـمات الهندسـيّة بوصفها نماذج للتصميم الثلاثي الأبعاد باستعمال الطابعة الثلاثيّة الأبعاد.

נסרק עם CamScanner

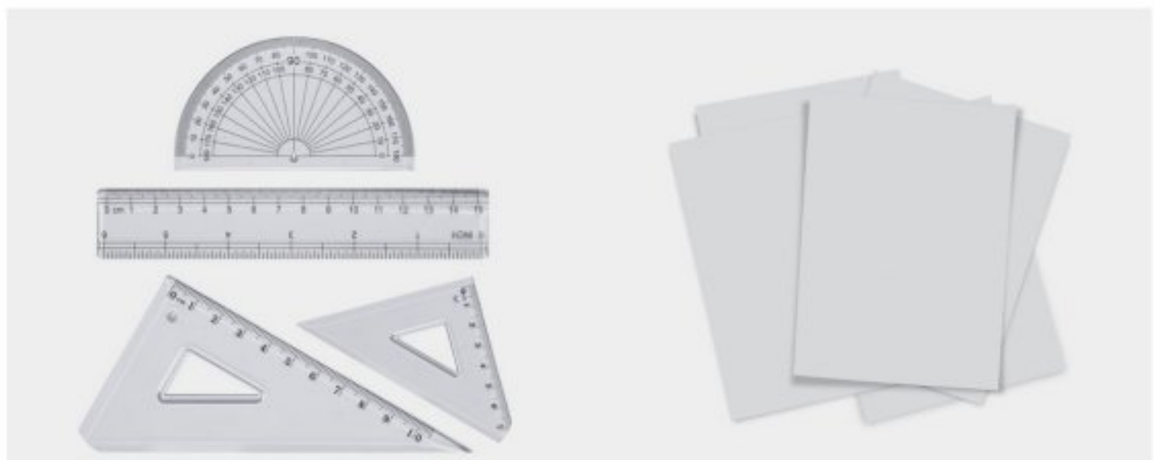
القوانين والمبادئ التكامليّة في النّشاط:

- مجموع عدد من حدود متتابعة هندسيّة.

النماذج والتصميم:

تصميم رسم هندسي من مربّعات متداخلة بأشكال معيّنة.

الموادّ والأدوات اللازمة:



ورق A3 — أدوات هندسيّة

التعلُّم القبلي:

- قانون مجموع حدود متتابعة هندسيّة منتهية.
- مفهوم محيط المضلّع.
- استعمال الأدوات الهندسيّة في الرسم.

التعلُّم الرأسي:

- مفهوم المتتابعات الهندسيّة.
- العلاقات الدالّية المتعلقة بالمتتابعات الهندسيّة.
- مفهوم المتسلسلة الهندسيّة.
- العلاقات الدالّية المتعلقة بالمتسلسلات الهندسيّة.
- تطبيق التعلُّم في مواقف حياتيّة، وحلّ المشكلات.

נסרק עם CamScanner

النشاط الخامس

المربّعات المتداخلة

إجراءات تنفيذ النشاط:

- ستنفِّذ مع زملائك في المجموعة بعض الأعمال اليدويّة باستعمال ورق وأدوات هندسيّة.
- يتعيّن عليك رسم مربّع باتباع الخطوات الآتية:

– ارسم مربّعًا طول ضلعه 40 cm باستعمال المسطرة والمنقلة.
– نصّف أضلاع المربّع جميعها، ثم صل بين كلّ نقطتين متقابلتين، لتكوّن أربعة مضلّعات داخل المربّع.
– ما شكل كلّ من المضلّعات الناتجة؟
– ما علاقة طول ضلع كلّ منها بطول ضلع المربّع الأصلي؟
– ما علاقة محيط كلّ منها بمحيط المربّع الأصلي؟
– اختر أحد المربّعات الناتجة بعد التقسيم، ولوّنه.
– اختر المربّع المشترك معه بالرأس فقط، ونصِّف أضلاعه جميعها، ثمّ صل بين كلّ نقطتين متقابلتين.
– ما شكل كلّ من المضلّعات الناتجة؟
– ما علاقة طول ضلع كلّ منها بطول ضلع المربّع الذي لوّنته في الخطوة السابقة؟
– ما علاقة محيط كلّ منها بمحيط المربّع الأصلي؟
– اختر أحد المربّعات الناتجة بعد التقسيم الثاني، ولوّنه.
– اختر المربّع المشترك معه بالرأس فقط، واستمرّ في هذه العمليّة، حتى تحصل على مربّعات صغيرة يصعب تقسيمها.

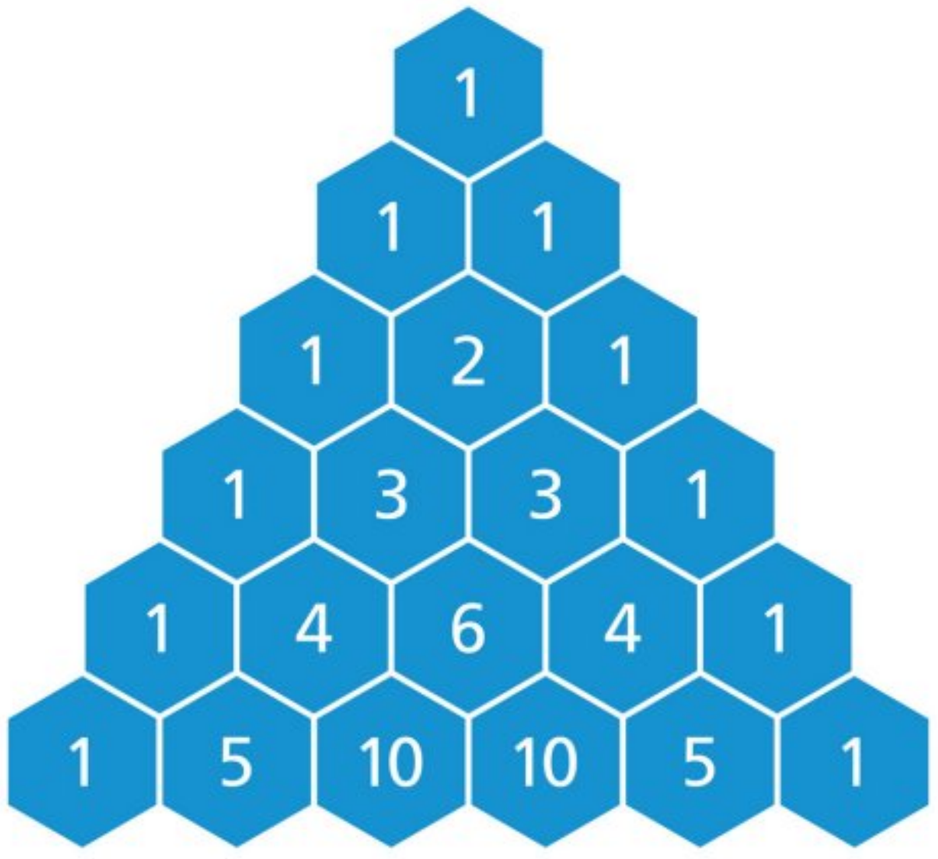
- احسب باستعمال المسطرة طول ضلع ومحيط كلّ مربّع من هذه المربّعات الملوّنة.
- سجّل أطوال أضلاع المربّعات الملوّنة التي تنتج في كلّ خطوة على شكل متتابعة.
- ما العلاقة بين كلّ حدّ والحدّ الذي يليه؟
- ما نوع المتتابعة التي حصلت عليها؟
- ما أساس هذه المتتابعة؟
- أوجد طول ضلع المربّع الملوّن الناتج من الخطوة العاشرة. (هل تستطيع فعل ذلك باستعمال المسطرة؟). بالتأكيد وجدت صعوبة في عمل ذلك. فما الحلّ؟

נסרק עם CamScanner

- تستطيع من خلال دراسة النمط لهذه المتتابعة كتابة حدّها النوني، وإيجاد قيمة أيّ حدّ من دون استخدام الأدوات الهندسيّة.
- سجّل أطوال محيطات المربّعات الملوّنة التي تنتج في كلّ خطوة على شكل متتابعة.
- ما العلاقة بين كلّ حدّ والحدّ الذي يليه؟
- ما نوع المتتابعة التي حصلت عليها؟
- ما أساس هذه المتتابعة؟
- تستطيع من خلال دراسة النمط لهذه المتتابعة كتابة حدّها النوني، وإيجاد قيمة أيّ حدّ من دون استخدام الأدوات الهندسيّة.

مجالات تطبيق الموضوع في الحياة:

يمكن تطبيق هذا الموضوع في العديد من مجالات العلوم الطبيعيّة والهندسيّة، ومن الأمثلة المشهورة عليها نموّ بعض أنواع البكتيريا، وطبيعة النموّ السكاني التي يتّخذ تزايدها شكل المتتابعة الهندسيّة. ومن أشهر الأمثلة أيضًا التطبيقات المرتبطة بمثلّث باسكال.



נסרק עם CamScanner

النشاط الخامس

المربّعات المتداخلة

تنبؤ

1. ما مجموع محيطات المربّعات الناتجة من الخطوات العشرة الأولى في النمط؟

للإجابة عن هذا السؤال، استعمل الجدول الآتي:

رقم خطوة التقسيم	طول ضلع المربّع الملوّن الناتج من التقسيم	محيط المربّع الملوّن الناتج من التقسيم
1	20	80
2	10	.....
3	.....	.....
4	.....	.....
5	.....	.....
6	.....	.....
7	.....	.....
8	.....	.....
9	.....	.....
10	.....	.....

- هل يمكنك الاستمرار في تقسيم المربّعات وإيجاد مجموع محيطاتها؟
- استعمل قانون المجموع لإيجاد مجموع المحيطات حتى خطوة التقسيم رقم 20.

2. صمِّم المربّعات المتداخلة على الحاسوب، ثم اطبعها باستعمال 3D printer.

تفسير وتحليل

- استخدم الإستراتيجيّة نفسها المتّبعة في النشاط الاستكشافي السابق، لإيجاد مجموع أطوال أضلاع المربّعات العشرة الأولى في النمط.
- اشتقَّ صيغة للمجموع لا تتضمّن a_1.

נסרק עם CamScanner

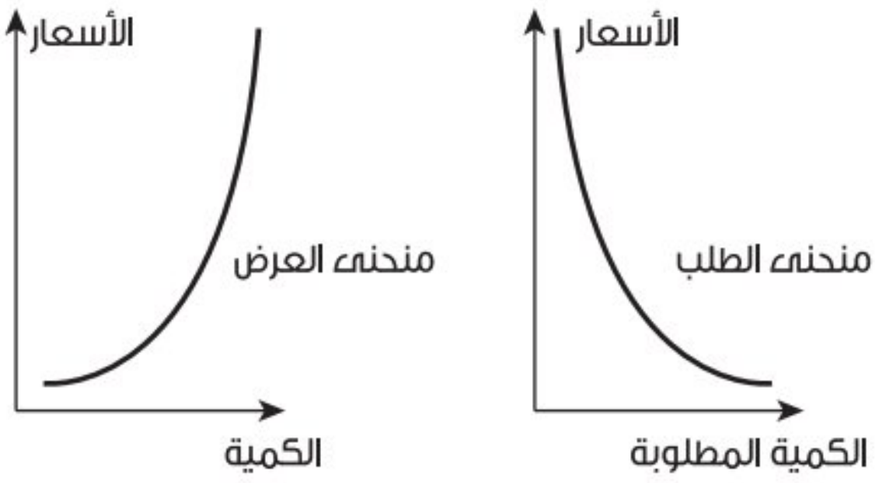
نشاط تطبيقي تكاملي

تسير سيّارة على طريق تجريبي، وعندما تصل النقطة A يتركها السائق تتحرّك بشكل حرّ (أي من دون استعمال أيٍّ من دواسة البنزين أو المكابح). وعند مرور السيّارة في النقطةِ A كانت سرعتها تتناقص بمعدل 20% كلّ دقيقة. فإذا كانت سرعتها عندما رصدت على النقطة A ، 100 km/h، فأجب عن الآتي:

- اكتب حدود المتتابعة التي تمثّل سرعة السيارة في نهاية كلّ دقيقة ابتداءً من النقطة A.
- ما نوع هذه المتتابعة؟
- ما أساسها؟
- هل يمكن الحصول على حدّ من حدود المتتابعة قيمته صفر في النهاية؟
- لو تركت السيّارة تسير بهذا النمط، فهل ستتوقف أم لا؟ فسّر إجابتك.
- ما مجموع المسافات التي ستقطعها السيّارة ابتداءً من النقطة A حتى تتوقّف؟

العرض والطلب:

الطلب هو الكمّيّة المطلوبة التي تكون لدى المستهلك الرغبة فيها والقدرة على شرائها عند الأسعار المحتملة خلال فترة زمنيّة محدّدة. ويعرف الطلب الفعال بأنه رغبة في الشراء مع قدرة عليه. والعلاقة بين السعر والكمّيّة المطلوبة علاقة عكسيّة؛ أي إنّ زيادة أحدهما تؤدّي إلى نقصان الآخر. أما في حالة العرض، فالعلاقة بين السعر والكمّيّة المطلوبة علاقة طرديّة؛ أي إنّ زيادة أحدهما تؤدّي إلى زيادة الآخر. ويعرف العرض بأنّه كمّيّة البضائع التي يكون البائعون مستعدين لبيعها عند الأسعار المختلفة، ومن الممكن تمثيل هاتين الحالتين بدوالّ أسّية كما في الشكل الآتي:



נסרק עם CamScanner

نشاط تطبيقي تكاملي

يوضّح منحنى العرض أنّ المعروض من السلع المتاحة للمستهلكين يكون أكثر في حال ارتفاع الأسعار؛ لأنّ المنتجين ستكون لديهم القدرة عل الحفاظ على الأرباح على الرغم من ارتفاع تكاليف الإنتاج، ويرجع ذلك إلى التوسّع على المدى القصير في حجم المبيعات. كما يوضّح منحنى الطلب العلاقة بين الأسعار والكمّيّات المطلوبة، فكلّما ارتفعت الأسعار انخفضت الكمّيّة المطلوبة، والعكس صحيح؛ لذا فإنّ العلاقة بين المتغيّرين علاقة عكسيّة.

نلاحظ مما سبق أنّ منحنى العرض ومنحنى الطلب يمكن تمثيلهما بدوالّ أسّية، مما يفيد العاملين في المجالات الاقتصاديّة في التنبّؤ بالتغيّرات المستقبليّة، ووضع الخطط والبرامج للإنتاج.

- ابحث عن تطبيقات اقتصاديّة أو علميّة أخرى يمكن تمثيلها بمتتابعات هندسيّة.

نشاط التحقّق من التعلّم

1. أوجد قيمة المجموع للمتسلسلة الآتية:
$$\sum_{i=1}^{20} 3(2-)^i$$
2. استعمل المتسلسلات الهندسيّة لإثبات أنّ: ... 0.3333 يساوي 3/1
3. يقسم قضيب من الحديد إلى ستة أجزاء؛ بحيث تشكل أطوال هذه الأجزاء متتابعة هندسيّة، فإذا كان طول أقصر جزء 3cm، وطول الجزء الأطول 96cm. فاحسب طول القضيب كاملًا.

נסרק עם CamScanner

أنشطة الحقيبة

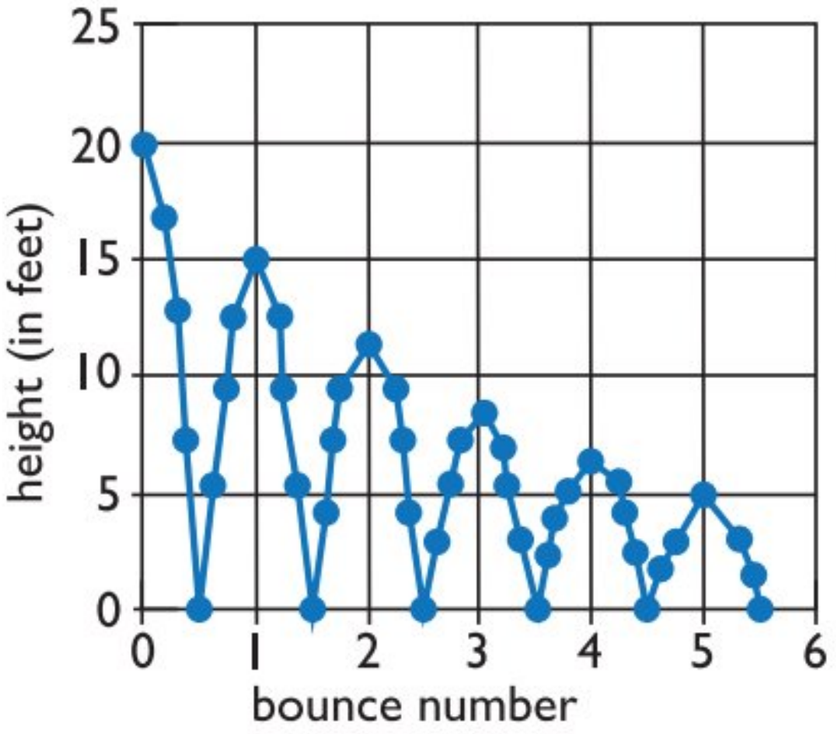
النشاط الرئيس السادس:

تمثيلات متعدّدة

زمن تنفيذ النشاط 60 دقيقة

נסרק עם CamScanner

المقدِّمة



تساعد التمثيلات المتعدّدة على توضيح الفارق بين الواقع الحسّي والافتراض الرياضيّ العددي اللذيْن يعبّران عن المسألة الواحدة؛ فعلى سبيل المثال: حركة البندول البسيط؛ فمهما كانت مسافة الشدّ كبيرة، فإنّ البندول سيتوقّف عن الحركة في النهاية، إلا أنّ التمثيل الرياضيّ للقيم التي تمثّل المسافات التي يقطعها البندول في كلّ اهتزاز لا يمكن أن يكون صفرًا حقيقيًّا، ولكنه يصل إلى قيمة قريبة جدًّا من الصفر. وهذا ما يعرف في الرياضيّات بالنهايات.

الأهداف الخاصّة بالنشاط

يتوقّع من الطالب أن:

- يجد مجموع متسلسلة هندسيّة لانهائية متقاربة.
- يحلّ مسائل على مجموع المتسلسلة الهندسيّة اللانهائية المتقاربة.

STEM

العلاقات التكامليّة في النّشاط مع العلوم الأخرى:

توظيف الأعمال اليدويّة الهندسيّة في توضيح المفاهيم والمبادئ الرياضيّة المتعلّقة بالمتتابعات الهندسيّة اللانهائيّة.

נסרק עם CamScanner

القوانين والمبادئ التكامليّة في النّشاط:

- مفهوم المتسلسلة اللانهائيّة.
- مجموع المتسلسلة اللانهائيّة التقاربيّة.

النماذج والتصميم:

تصميم نموذج رياضيّ من قصاصات الورق التي تقصّ وفق النمط المحدَّد في النشاط.

الموادّ والأدوات اللازمة:

مقصّ

بطاقة من الورق طول ضلعها لا يقلّ عن ٨ بوصات.

التعلُّم القبلي:

- مفهوم المتتابعة الهندسيّة المتقاربة.
- مفهوم المتتابعة الهندسيّة المتباعدة.

التعلُّم القبلي:

- مفهوم المتتابعات الهندسيّة.
- العلاقات الدالّية المتعلقة بالمتتابعات الهندسيّة.
- تصنيف المتتابعات الهندسيّة بالاعتماد على عدد الحدود.
- مفهوم المتسلسلة الهندسيّة.
- العلاقات الدالّية المتعلقة بالمتسلسلات الهندسيّة.
- مفهوم المتسلسلة الهندسيّة المتقاربة والمتباعدة.
- إيجاد مجموع متسلسلة متقاربة.
- تطبيق التعلُّم في مواقف حياتيّة، وحلّ المشكلات.

נסרק עם CamScanner

النشاط السادس

تمثيلات متعدّدة

إجراءات تنفيذ النشاط:

- ستحتاج في هذا النشاط إلى بطاقة مربّعة الشكل، طول ضلعها لا يقلُّ عن 8 بوصات.
- افترض أنَّ مساحة البطاقة تمثّل وحدة مربّعة.
- قصَّ البطاقة نصفين، خذ أحدهما،وافترض مساحته الحدَّ الأوّل لمتتابعة تريد تشكيلها.
- قصَّ النصف الآخر نصفين، وخذ أحد النصفين وافترض مساحته الحدَّ الثاني للمتتابعة.
- استمرّ في هذه العملية.
- اكتب المتسلسلة اللانهائيّة التي تعبِّر عن الأجزاء لديك.
- إذا أمكن تقسيم البطاقة بهذه الطريقة إلى ما لا نهاية، فما مجموع المتسلسلة التي أوجدتها سابقًا؟
- ما العلاقة بين مجموع المتسلسلة ومساحة البطاقة الأصليّة؟

مجالات تطبيق الموضوع في الحياة:

يمكن تطبيق هذا الموضوع في العديد من المجالات في العلوم الطبيعية؛ مثل حركة البندول، أو سقوط كرة مطاطيّة من ارتفاع معيّن عن سطح الأرض، وانعكاسات الصورة في مجموعة من المرايا توضع إلى جانب بعضها بزوايا معيّنة.

تنبؤ

- اشتقَّ معادلة مجموع متسلسلة هندسيّة لا نهائيّة متقاربة.
- وضّح بأمثلة العلاقة بين قيمة أساس المتتابعة الهندسيّة وقيمة حدود المتتابعة من حيث الزيادة والنقصان في القيم (تزايد الدالّة أو تناقصها)، وشكل التمثيل البياني لكلّ متتابعة.
- هل المتتابعة التي حدودها جميعها تتكوّن من العدد نفسه تُعدُّ متتابعة هندسيّة؟ فسّر ذلك.

נסרק עם CamScanner

تفسير وتحليل

1. هل يمكن أن تستمرّ الأجسام –في الواقع– في الحركة من دون توقف؟ ولماذا؟ أعطِ مثالًا توضيحيًّا لإجابتك.
2. متى يكون للمتسلسلة الهندسيّة اللانهائيّة مجموع؟ وضّح تفسيرك.

نشاط تطبيقي تكاملي

- ستستعمل في هذا النشاط ماصّات العصير البلاستيكيّة.
- أحضر مجموعة من هذه الماصّات، وقصَّها إلى قطع صغيرة متساوية الطول.
- استعمل خيطًا لجمع هذه القطع؛ بحيث تدخل الخيط في داخل كلّ قطعة.
- صمِّم نماذج هندسيّة من هذه القطع؛ بحيث يكون عدد القطع في كلّ شكل ضعف عدد القطع في الشكل الذي يسبقه، كوّن 6 أشكال.
- اكتب حدود المتتابعة التي حصلت عليها.
- ما نوع هذه المتتابعة؟
- كم قطعة ستحتاج لبناء الشكل العاشر؟
- ما مجموع القطع التي ستستعملها لبناء 10 أشكال؟

نشاط التحقّق من التعلّم

1. ما قيم b التي يمكن عندها إيجاد قيمة مجموع المتسلسلة؟
$$3 + 9b + 27b^2 + 81b^3 + \ldots$$
2. اكتب الكسر العشري الدوري على صورة كسر اعتيادي $4,\overline{96}$ مستعملًا مجموع المتسلسلة الهندسيّة اللانهائيّة.

נסרק עם CamScanner